УДК 330.45

МОДЕЛЮВАННЯ ФІНАНСОВОЇ СТІЙКОСТІ БАНКІВСЬКОЇ СИСТЕМИ З ВИКОРИСТАННЯМ КАНОНІЧНИХ КАТАСТРОФ

MODELING OF FINANCIAL STABILITY OF THE BANKING SYSTEM BY MEANS OF CANONICAL CATASTROF

Кишакевич Б.Ю.
доктор економічних наук, професор,
Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

Климкович І.В.
аспірант,
Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка

Розглянуто основні концептуальні положення теорії катастроф і проаналізовано перспективи їх застосування у моделюванні фінансової стійкості банківської системи. Обґрунтовано важливість визначення критичних точок цільової функції як основного методу дослідження стрибкоподібних змін фінансової стійкості банківської системи.
Ключові слова: *теорія катастроф, фінансова стійкість, банківська система, катастрофа типу «збірка», критичні точки.*

Рассмотрены основные концептуальные положения теории катастроф и проанализированы перспективы их применения в моделировании финансовой устойчивости банковской системы. Обоснована важность определения критических точек целевой функции как основного метода исследования скачкообразных изменений финансовой устойчивости банковской системы.
Ключевые слова: *теория катастроф, финансовая устойчивость, банковская система, катастрофа типа «сборка», критические точки.*

The main conceptual aspects of the catastrophe theory are considered and the prospects of their application are analyzed in order to model the financial stability of the banking system. The importance of determining the critical points of the target function as the main method of study of leap-like changes in the financial stability of the banking system are substantiated.
Keywords: *disaster theory, financial stability, banking system, catastrophe type of assembly, critical points.*

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. Метою управління фінансовою стійкістю банківської системи є забезпечення здатності системи виконувати всі свої функції у повному обсязі, незважаючи на вплив зовнішніх шоків та внутрішніх дестабілізуючих чинників. Теоретичний і практичний інтерес становить розроблення математичних моделей і алгоритмів на основі використання інструментарію теорії катастроф для дослідження і моделювання нестандартних (позаштатних і екстремальних) ситуацій, пов'язаних із фінансовою стійкістю банківської системи. Надзвичайно важливим завданням є дослідження поведінки банківської системи в околі точки рівноваги.

Аналіз останніх наукових досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання цієї проблеми і на які спирається автор. Проблема дослідження фінансової стійкості банківської системи із використанням інструментарію теорії катастроф охоплює широке коло проблем пов'язаних із моделюванням ключових показників діяльності фінансової системи.

Проблемам моделювання стану динамічних систем із застосуванням теорії катастроф присвячені роботи Б.Ю. Кишакевича [7], В.І. Арнольда [3], Р. Тома [4], Е. Зімана [9], А.Б. Бушуєва [1], А.М. Ляпунова [5], В.-Б. Занга [8], Н.С. Неділько, М.А. Асаула.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується означена стаття. Аналіз наукової літератури показує, що сьогодні не створено єдиного підходу на основі методів теорії катастроф, який би міг чітко спрогнозувати поведінку банківської системи і попередити можливе настання катастрофи.

Формулювання цілей статті **(постановка завдання)**. Метою статті є розроблення підходу до оцінки фінансової стійкості банківської системи на основі канонічних катастроф, який би міг об'єднати ключові характеристики діяльності банківського сектору.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів. У дослідженнях В.І. Арнольда [3] теорія особливостей трактується як узагальнення дослідження функцій на критичні точки. Так, для складного динамічного процесу фінансовими результатами діяльності банківської системи є прибуток або збиток. Точка, в якій відбувається зміна фінансового результату діяльності з «прибутку» на «збиток», називається точкою біфуркації (або катастрофи).

Під катастрофою у дослідження розуміється різка, стрибкоподібна зміна характеру поведінки динамічної системи (порушення її неперервності) за поступових змін її керівних параметрів, що приводить до деградації системи (банківської системи) [7, с. 315].

Отже, якщо негативний результат фінансової діяльності банківської системи ототожнити з катастрофою у банківському секторі, то в такому трактуванні катастрофами кінцевих результатів можна вважати періоди порушення неперервності і зміни співвідношення між темпами приросту доходів та витрат для функцій з однією чи більшою кількістю змінних.

Основна гіпотеза теорії катастроф ґрунтується на тому, що система розвивається до стану рівноваги, який визначається локальними мінімумами потенційної функції системи. Аргументами цієї функції є керівні змінні (*k*) і змінні стану (*x*). Керівні змінні визначають еволюцію банківської системи, тоді як змінні стану визначають стан і динаміку системи. Згідно з [6] еволюція динамічної системи стосовно до рівноваги найкраще ілюструється рухом кулі по викривленій одновимірній поверхні, де сфера демонструє стан системи. Такі взаємозв'язки представлено на рис. 1.

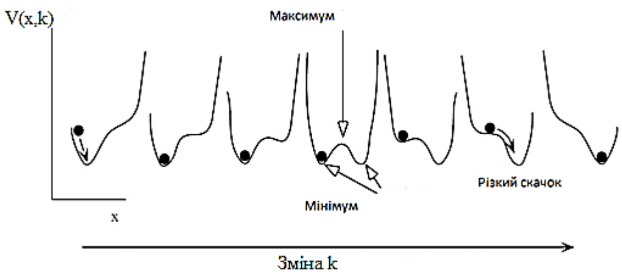

Рис. 1. Типи потенційної функції V (x, k) у процесі еволюції і здатність системи до рівноваги

** На основі джерела [6]*

Три ймовірні стани рівноваги системи (банківської системи), запропоновані в роботі [6], показані в центрі рис. 1. Два з них демонструють стабільну рівновагу (відзначені як мінімуми на рис. 1), де певні порушення не змінюють поведінку системи. Третій стан – нестійка рівновага (позначений як максимум на рис. 1), де навіть незначна зміна змушує систему розвиватися в невизначеному напрямі. Системи, які приводяться в рух у бік рівноважних значень (маленька кулька на рис. 1), можуть бути класифіковані відповідно до конфігурації їх критичних точок, тобто точок, у яких перша або, можливо, друга похідна дорівнює нулю.

Умовно алгоритм дослідження фінансової стійкості банківської системи із застосуванням теорії катастроф представлений на рис. 2.

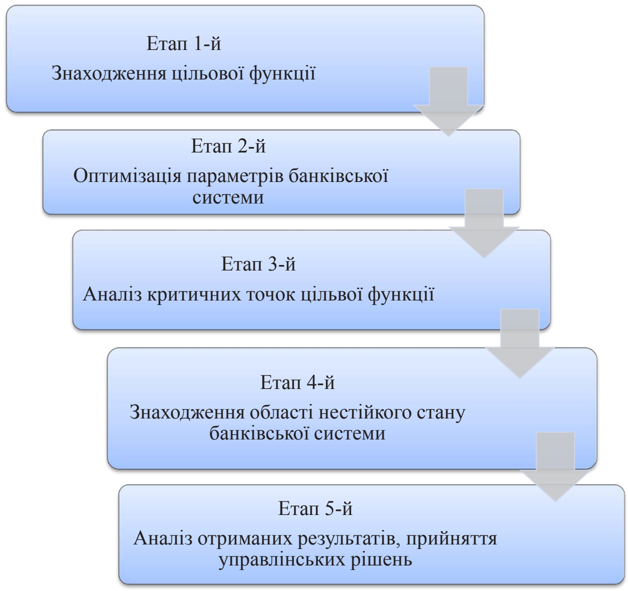

Рис. 2. Алгоритм дослідження стійкості банківської системи інструментарієм теорії катастроф

На першому етапі дослідження розглянемо задачу оптимізації

$$\min f(x,k),$$

де *x* – змінні, *k* – параметри. Мінімум *f* досягається, коли

$$grad\, f = 0. \qquad (1)$$

Розв'язок (1) дає точку рівноваги, яка мінімізує функцію *f(x, k)*. Оптимальний розв'язок визначає поверхню у просторі *(x, k)*, на якій розташований стан рівноваги системи.

Нехай у стані рівноваги друга похідна функції *f(x, k)* дорівнює нулю або гессіан ($\det\left\|\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right\|_{x_0}$) сингулярний. Такі точки рівноваги відомі як особливі, і саме в таких точках ми спостерігаємо незвичну поведінку системи.

Розглянемо систему з двома керівними параметрами k і k_1. Скористаємося субіндексами, описаними в роботі [2, с. 164], а саме: k – субіндекс банківського сектору (СБС), k_1 – субіндекс інвестицій (СІ). Перший із них характеризує банківський сектор, а другий – інвестиційний клімат.

Використаємо катастрофу типу «збірка» – одну з елементарних катастроф Рене Тома. Розглянемо функцію

$$f(x,k,k_1) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}kx^2 + k_1 x\,. \tag{2}$$

Збірка має в докритичній області один стійкий стан рівноваги (див. рис. 3), а в закритичній області – два стійких і один нестійкий стан рівноваги (див. рис. 4) [1].

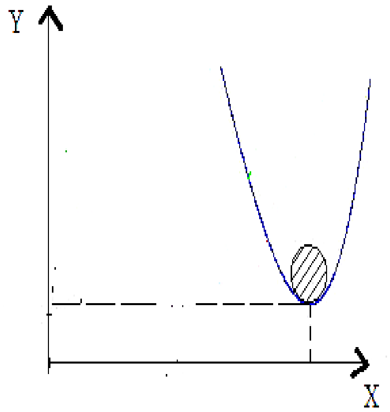

Рис. 3. Графічна інтерпретація закритичної області

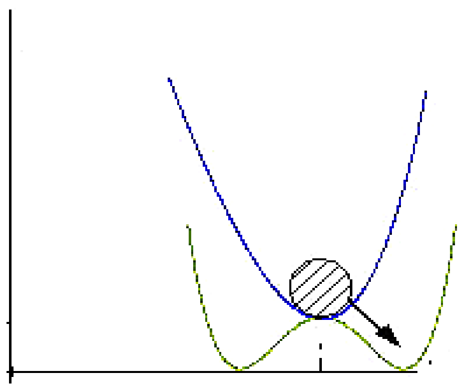

Рис. 4. Графічна інтерпретація докритичної області

Для функції *f* величина x^4 – розгалуження катастрофи, а значення $\eta f = \frac{1}{2}kx^2 + k_1 x$ – довільне збурення.

Вироджені точки (екстремуми функції *f*) знаходяться прирівнюванням $\frac{df}{dx}$ до нуля:

$$x^3 + kx + k_1 = 0. \tag{3}$$

Отримане рівняння може мати або один, або три дійсні корені. Якщо $\left(\frac{-k}{3}\right)^3 > \left(\frac{k_1}{2}\right)^2$, рівняння (3) має три дійсні корені. В іншому разі воно має тільки один дійсний корінь. Границя області єдиного і неєдиного розв'язку визначається виразом

$$4k^3 + 24k_1^2 = 0. \tag{4}$$

Це рівняння визначає збірку кривих на площині (k, k_1) (див. рис. 5) [8, с. 80].

Як показано на рис. 5, поза збіркою існує тільки один корінь, і він завжди відповідає min *f(x,k)*.

Всередині області є три дійсних корені: один із них відповідає максимуму (нестійкий стан), а два – мінімуму (стійкий стан), що можна перевірити, досліджуючи другу похідну функції *f*. Заштрихована множина – це область катастрофи, а границя – це множина біфуркації, де локальний мінімум зникає (точка 3 і 7) [8, с. 80].

У разі збірки k *називається роз'єднуючим множником*, а k_1 – *нормальним множником* [9]. Згідно з теоремою Тома для катастрофи збірки існують розглянуті далі вироджені точки [4].

Двічі вироджені точки (розташовані по лініях *PR* і *PC*) знаходяться за формулою:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0,\;\; 3x^2 + k = 0\,. \tag{5}$$

Тричі вироджена точка *P* задовольняє такі рівності:

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = 0,\;\; f(x) = 6x = 0. \tag{6}$$

Межею стійкого стану банківської системи є сепаратриса. Для її знаходження потрібно розв'язати систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x^3 + kx + k_1 = 0 \\ 3x^2 + k = 0 \\ 6x = 0 \end{cases}. \tag{7}$$

Прирівнюючи дискримінант кубічного рівняння до нуля, отримуємо рівняння сепаратриси *{PR, PC}*:

$$\left(\frac{k}{3}\right)^3 + \left(\frac{k_1}{2}\right)^2 = 0\,. \tag{8}$$

Розглянемо два сценарії розвитку банківської системи (див. рис. 6). *Сценарій 1.* Якщо банківська система в початковий момент перебуває в точці *N* і керівний параметр k_1 стрімко зменшується (прямує до нуля), то стан системи змінюється вздовж *NMQ*, як видно з рис. 6, у точці *M* відбувається стрибок (катастрофа). Отже, *M* – точка біфуркації. Із поверненням параметра k_1 у початкове положення стан системи змінюватиметься вже іншим шляхом – *QEA*.

Сценарій 2. За правильного регулювання керівних параметрів k і k_1 можливий перехід банківської системи із початкової точки *N* у *Q* уздовж *NSQ*. У цьому разі перехід відбувається плавно (монотонно), і катастрофи для банківської системи не відбувається.

Проте реальна задача управління фінансовою стійкістю банківської системи є складнішою, оскільки рівняння, яке досліджує процес, не є лінійним. Але критерії для дослідження стійкості лінійних систем можна використовувати і в загальній, нелінійній ситуації [5].

Розглянемо дещо інший підхід до пошуку множини стійкого і нестійкого стану банківської системи. Скористаємось інструментарієм математичного аналізу, а саме проведемо аналогію між дослідженням функції на опуклість та вгнутість і дослідженням функції методами теорії катастроф. Якщо крива функції буде опуклою, то така множина буде характеризувати нестійкий стан банківської системи, а якщо вгнутою – стійкий стан.

Нехай катастрофа типу «збірка» має вигляд:

$$f(x,a,b) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx,$$

де *a,b* – керівні параметри, *x* – змінні, які визначають стан і динаміку банківської системи.

Інтервали опуклості і вгнутості функції *f(x,a,b)* характеризуються знаком її другої похідної: якщо в деякому інтервалі друга похідна менша нуля *f''(x)*<0, то крива опукла на цьому інтервалі, а якщо більша *f''(x)*>0, то крива вгнута на цьому інтервалі.

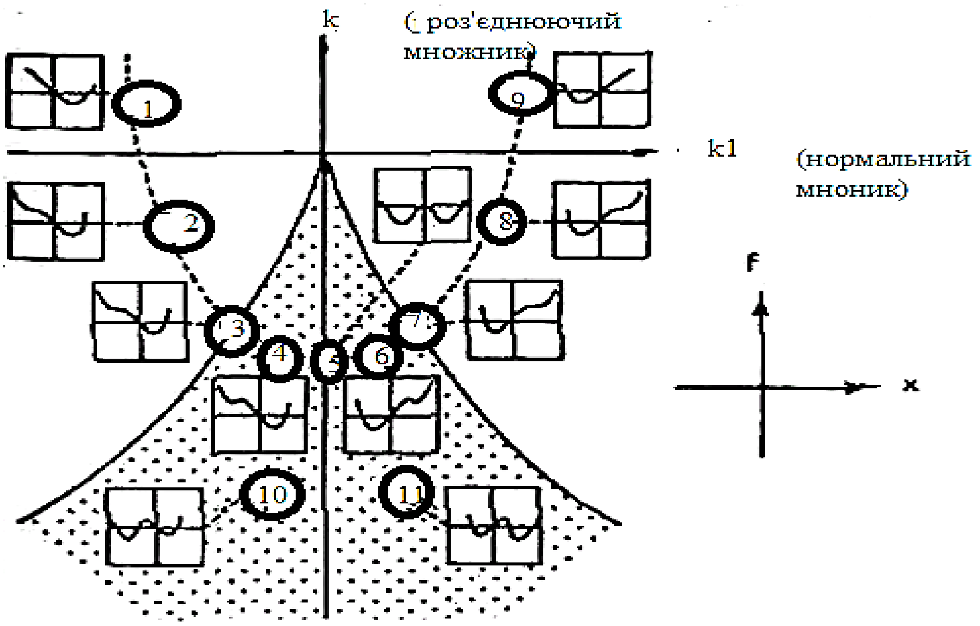

Рис. 5. Керівне різноманіття збірки

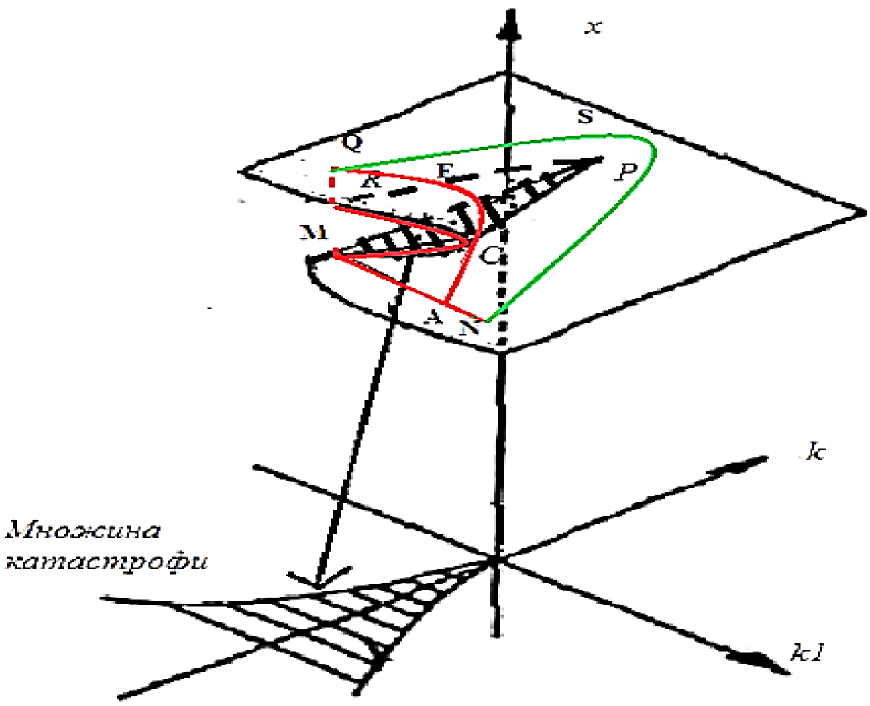

Рис. 6. Катастрофа типу «збірка»

Отже, множина розв'язків нерівності $3x^2 + a < 0$ буде характеризувати нестійкий стан банківської системи, а $3x^2 + a > 0$ – стійкий.

Розглянемо застосування теорії катастроф для оцінки різких коливань фінансової стійкості банківської системи, коли цілком фінансово стійка і благополучна система потрапляє у кризову ситуацію.

Параметри цільової функції фінансової стійкості банківської системи $f(x,K,t)$ є функціями:

$x = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – фактори розвитку банківської системи (x_1 – капітал, x_2 – кадри і т. д.);

$K = f(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – фінансовий стан банківської системи (k_n – ключові фінансові показники);

t – час – лінійний параметр.

Опишемо фінансово-економічний стан банківської системи з часом *t* і за змін керівних параметрів, використовуючи методи теорії катастроф. Під час вибору керівних параметрів скористаємося індексами, які використовуються в роботі [2, с. 124]. Позначимо керівні параметри через ($k_1, \ldots, k_{23}$).

Отже, проведемо дослідження залежності від часу одного або двох параметрів, вважаючи інші значення некритичними. Нехай у банківської системи тільки один керівний показник k_1. Тоді для функції *f* використаємо канонічну катастрофу складки.

Оскільки фінансово-економічний стан *K* залежить від часу (*t*), то отримаємо два види *K*:

$$K = \frac{1}{3}x^3 + k_1 x \,, \tag{9}$$

$$K = \frac{1}{3}t^3 + k_1 t \,, \tag{10}$$

де $x = x(t)$.

У (9) залежність *K* від *t* невідома, а змінна стану *x* – різні фінансово-економічні чинники розвитку банківської системи.

Для функції виду (10) значення фінансово-економічного стану банківської системи безперервно змінюються в часі *t* за різних значень параметра k_1.

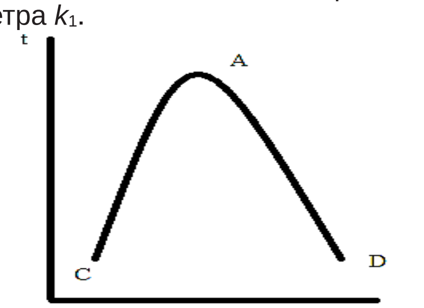

Рис. 7. Крива складки

Отже, у (10) ізольована точка $k_1 = 0$ – множина біфуркації. Якщо $k_1 < 0$, то функція (10) має дві критичні точки (стійка рівновага – область між точками C і A) і одну нестійку рівновагу – область між точками A і D (рис. 7).

Отже, під час моделювання фінансово-економічного стану банківської системи за допомогою катастрофи складки в момент настання кризи відбувається різка втрата стійкості і розвиток обривається. Тому катастрофу складки доцільно застосовувати для аналізу фінансово-економічного стану банківської системи, у якій один кризовий показник приводить до втрати стійкості.

Нехай у банківської системи два керівних показника – k_1 і k_2. Тепер для функції *K* використаємо канонічну катастрофу збірки. Оскільки час не може бути керівним параметром, отримуємо такі види *K*:

$$K = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}k_1 x^2 + k_2 x \,, \tag{11}$$

$$K = \frac{1}{4}k_1^4 + \frac{1}{2}tk_1^2 + k_1 k_2 \,, \tag{12}$$

$$K = \frac{1}{4}k_1^4 + \frac{1}{2}k_1^2 k_2 + tk_1 \,, \tag{13}$$

$$K = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}k_1 t^2 + k_2 t \,, \tag{14}$$

де $x = x(t)$.

Розглянемо детальніше функцію виду (13). Характер поведінки функції (13) визначається величиною параметра k_2. Якщо $k_2 > 0$, то фінансово-економічний стан банківської системи стійкий (функція *K* – монотонна). Але за $k_2 < 0$ функція *K* перестає бути монотонною і отримує максимум і мінімум за $k_1 = \pm\sqrt{\frac{k_2}{3}}$ [10]. Отже, фінансово-економічний стан системи змінюється зі стійкого на нестійкий – відбувається катастрофа стійкості банківської системи.

Висновки з цього дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямі. У статті проаналізовано особливості оцінювання стійкості банківської системи. Авторами обґрунтовано та розроблено алгоритм упровадження у практику застосування інструментарію теорії катастроф для моделювання стійкості банківського сектору. Під час оцінюванні стійкості банківської системи методами теорії катастроф було використано елементарні катастрофи типу складки і збірки. Показано, що теорію катастроф можна застосувати як метод дослідження стрибкоподібних переходів і раптових змін стійкості банківської системи.

Практична цінність такого дослідження полягає у можливості своєчасного передбачення виникнення кризових явищ у банківській системі, що буде сигналом для розроблення дієвої стратегії розвитку банківського сектору.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Бушуев А.Б. Некоторые предварительные прикидки по использованию теории катастроф в организационно-экономических задачах / А.Б. Бушуев. [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://www.metodolog.ru
2. Кишакевич Б.Ю. Використання рейтингових моделей в ризик-менеджменті / Б.Ю. Кишакевич // Вісник Львівської державної фінансової академії. – № 16. – 2009 р. – С. 160-169.
3. Арнольд В.И. Теория катастроф / В.И. Арнольд. – [3-е изд.], доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 128 с.
4. Thom R. Stabilitй structurelle et morphogйnиse / Thom Rene. – Interйdition, Paris, 1977.
5. Ляпунов А.М. Собр. соч./Ляпунов А. М. – М.; Л., 1956. – Т. 2.
6. Wagenmakers E.-J.,Van der Maas H.L.J. and Molenaar P.C.M., 2005, Fitting the Cusp Catastrophe Model. [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://www.ejwagenmakers.com/2005/Encyclopediacatastrophe.pdf
7. Кишакевич Б.Ю. Застосування теорії катастроф для моделювання фінансової стійкості банківської системи / Б.Ю. Кишакевич, І.В. Климкович // Науковий вісник НЛТУ України. – 2016. – Вип. 26.6. – С. 312-318.
8. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории: Пер. с англ. / В.-Б. Занг // – М.: Мир, 1999. – 335 с.
9. Zeeman E.C. Catastrophe Theory-Selected Papers 1972-1977 / E.C. Zeeman // Reading, MA: Addison-Wesley, 1977. – P. 256.
10. Коваленко Анна Владимировна Математичское моделирование финансово-економического кризисна на предприятии с использованием канонических катастроф складки и сборки / А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов, С.Ш. Трахова // Научный журнал КубГАУ. – 2010. – № 63(09). [Електронний ресурс] / Режим доступу: http://ej.kubagro.ru/2010/09/pdf /13.pdf